TELECOM ParisTech

Une école de l'IMT

Analyse quantitative et prévision des fautes

Institut Mines-Télécom

Contexte

- **1 système avec potentiellement des mécanismes de tolérance aux fautes**
- **Ce que vous savez déjà faire normalement**

  Identifier des limites dans le type de fautes et leur nombre telles que le système reste fiable, ou peut revenir dans un état fonctionnel.
- **Ce que l'on voit aujourd'hui :**
  - Modéliser l'incertitude sur l'occurrence des fautes via des probabilités
  - Modéliser le cycle de vie complet du système via un processus stochastique
  - Utiliser des modèles « sur étagère » pour faciliter certaines analyses (Chaînes de Markov, et PTA)

Rappel de probabilité

- **Une variable aléatoire est définie pour un domaine D, la variable en elle-même est une fonction de certaines parties de D vers un espace probabilisé.**
- **Si votre variable a un nombre fini de réalisations, la fonction attribuant une probabilité à chacune est la distribution de masse**
- **Si votre variable a un nombre infini de réalisations, on parle de distribution de probabilité**
- **Deux lois sont cruciales de notre point de vue : le théorème de Bayes, et la somme des événements disjoints.**

Occurrence d’une défaillance

- **Ce que l’on va modéliser :**
  - Système S, défaillance f
  - 2 cas :
    - Le système peut défaillir de manière asynchrone à l’usage
    - Le système ne peut défaillir que lorsqu’il est sollicité
  - 2 caractérisations
    - Probabilité de défaillir par demande
    - Distribution des dates de défaillances

Occurrence de défaillance à la demande

- **Modélisation triviale : Variable aléatoire booléenne indépendante de tout autre phénomène**
  - Caractérisation : 1 paramètre pour la loi de Bernouilli
  - Fiabilité = 1-p
  - Défaillance = p
- **Modélisation plus avancée : exploiter la structure de sorte que l'occurrence d'une défaillance est caractérisée par pred (X1,…..Xn) où pred est un prédicat et X1,….Xn sont des variables aléatoires.**

Occurrence de défaillance « asynchrone »

- **Principe : X variable aléatoire réelle (positive) telle que X caractérise la date d'occurrence de la prochaine défaillance à partir de la date 0.**
- **Rappel : X peut être vue comme la caractérisation d'un processus d'arrivée. Ainsi, on peut définir une séquence X1,….Xn décrivant les différentes dates successives de défaillance (si cela fait sens)**
- **Le cas sympathique de la loi exponentielle**
  - Modélise des temps d'arrivée « sans mémoire »
  - Pas besoin de se souvenir de la date 0
  - 1 seule paramètre pour la caractérisation.

Rappel sur la loi exponentielle

- **Pdf :**

$f(t)=1/\lambda * \exp(-t/\lambda)$

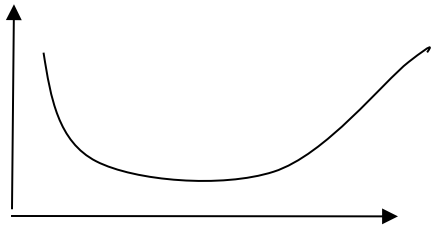
- **Espérance :**

$1/\lambda$

Idée : la probabilité qu'une défaillance se produise instantanément (ie entre t et t+h pour h tendant vers 0, c'est constante égale à λ).

Le cas des loi à mémoire : Weibull

- **Pb : faire l'hypothèse d'un taux constant s'applique assez mal au matériel**



- **Taux d'occurrence variable → courbe en baignoire**
- **Weibull : variation du taux de défaillance contrôlée par 3 paramètres… je n'en dirai pas plus car ces modèles sont propres aux matériel…**

Prise en compte de mode de fonctionnement / du recouvrement de l'état défaillant

- **Problème :**

un système tolérant aux fautes possède différents états de fonctionnement

→ **différentes défaillances**

→ **Différents taux de défaillance**

Solution

Modélisation par processus stochastique (vision séquentielle)

Modélisation par vecteur d'états (vision hiérarchique)

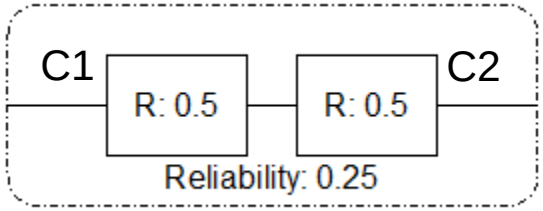
Modélisation mixte : vecteur de processus stochastiques

Propositional random formula et reliability block diagram

- **Question : peut on se donner un modèle graphique proche de l'architecture pour modéliser ces situations**
- **Idée : proposer des structures hiérarchisables et composables + une méthode d'évaluation de fiabilité**
- **Solution Reliability Block Diagram (RBD)**
- **http://pages.mtu.edu/~pjbonamy/rbdtool.html**
- **Principe :**
  - 1 block = 1 système avec un état binaire : fiable / non fiable
  - Une loi de probabilité pour la défaillance (Bernouilli paramètre p)
  - Des motifs composites de blocs : série, parallèle, K out of N….

Motifs de base, sémantique et évaluation la série

- **Le bloc série (2 à n composants) :**



sys

- **Signification :**

Le système requiert

C1,C2 pour être fiable

- **Formalisation**

si fx état booléen / vrai => x fiable

fsys = fc1 & fc2

- **Interprétation numérique**

R(C1)= P(fc1), R(C2)=P(fc2)

R(Sys) = P(fc1)*P(fc2)

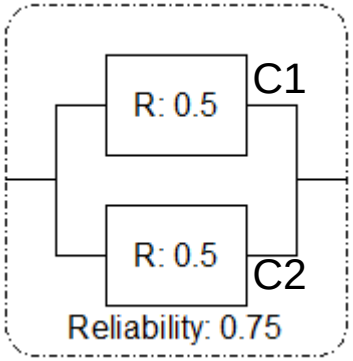
- **Hypothèse sous jacente**

Indépendance des défaillances de C1 vs C2

- **Pb possible : un même composant ne peut apparaître à deux endroits**

Motifs de base, sémantique et évaluation la composition parallèle

- **Le bloc parallèle (2 à n composants possibles):**



sys

- **Signification :**

Le système requiert

C1 ou C2 pour être fiable

- **Formalisation**

si fx état booléen / vrai => x fiable

fsys = fc1 ou fc2

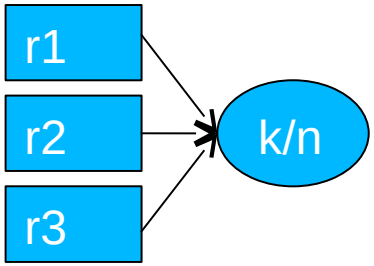
- **Interprétation numérique**

R(C1)= P(fc1), R(C2)=P(fc2)

R(Sys) = P(fc1)+P(fc2)-P(fc1)*P(fc2)

Motifs de base, sémantique et évaluation
le K parmi N

- **Le bloc série :**



- **Signification :**

Le système requiert

X={Cj| Cj fiabl} / Card(X) ≥ k

- **Formalisation**

(peu d'intérêt)

Remarque : il y a une théorie sous jacente pour automatiser les calculs

Chaque structure est associée à une formule logique à base de booléens !

La fiabilité d'une architecture == une formule logique

Formalisation logique pure du RBD

- **Une architecture avec des noms …**
  - Chaque composant élémentaire se voit affecter un état booléen
  - Les compositions série / parallèle / k parmi N définissent des formules logiques à partie des formules des blocs ou structures contenues
  - Les variables d'état booléen sont vues comme des variables aléatoires 2 à 2 indépendantes
- **Avantages**
  - Utilisation de noms => un même composant peut être utilisé à deux endroits, ce n'est plus grave !
  - Indépendance des états élémentaires => règles de calculs simples si la formule possède une bonne propriété : forme normale de disjonction en conjonction disjointes

  ⇒ Cela fournit un cadre complet, possibilité d'utiliser des variables continues pour chaque état (date de passage de vrai à faux) le modèle devient « temporisé »).

Utilisation en direct de RBD pour fiabilité réplication passive / active à 3 répliques

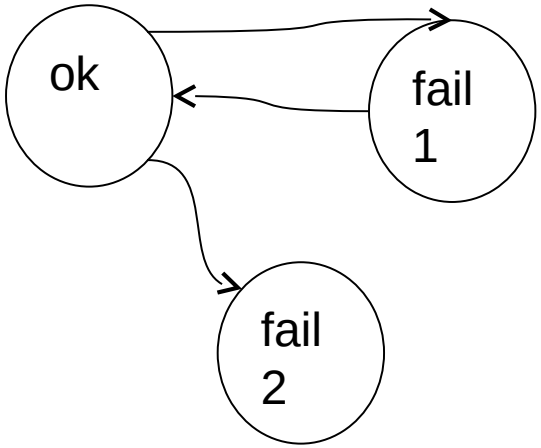
Modélisation fine des modes de défaillance

- **Problèmes :**
  - que faire pour modéliser un mode de défaillance réparable ?
  - Comment modéliser l'éventualité de deux modes de défaillance distincts à partir d'un même état ?
- **Solutions :**
  - Modéliser les changements d'états explicitement
  - Modèles pour l'analyse : Chaînes de Markov (discrètes et continues), et peut être les probabilistic timed automata

Rappel : automate et système à transition

Modèle Automate à état fini

- **Q : ensemble des états**
- **Δ : ensemble des transitions (q,q') (changements d'états possibles)**
- **I : états initiaux**
- **L : étiquetage de Δ par des noms /des symboles**



Chaine de Markov en temps discret (pour un domaine fini)

Idée : l'état de votre système est aléatoire car

il y a une incertitude quantifiable à l'initialisation

il y a une incertitude lors des changements d'états

Chaine de Markov discrète = processus stochastique : (Xi), i dans N tel que

- **chaque Xi est une variable aléatoire sur D.**
- **Xi représente l'état du processus à la date discrète i**
- $P(X_i=v_i \mid X_{i-1}=v_{i-1}, X_{i-2}=v_{i-2},\ldots X_0=v_0)= P(X_i=v_i \mid X_{i-1} =v_{i-1})$

Interprétation : L'état i ne dépend que de l'état i-1, et de la probabilité conditionnelle $P(X_i=v_i \mid X_{i-1} =v_{i-1})$

Chaine de Markov en temps discret (pour un domaine fini)

Vocabulaire et notations

$P(X_i=v_i \mid X_{i-1}=v_{i-1})$ est la probabilité de transition de vi-1 vers vi

La définition des probabilités de transition et de la distribution de X0 caractérise totalement la chaîne

Représentation graphique : système à transition étiqueté par les probabilités de transitions

Modélisation d'un cas pratique

3 états possibles : ok failed1, failed2 tel que

A chaque transition

- **Soit le système est « utilisé » avec pour effet un comportement normal, ou une défaillance fail1, ou une défaillance fail2.**
- **Soit, une réparation est tentée, avec pour effet un retour à l'état ok, ou un échec.**
- **Soit le système est dans l'état failed2 et reste définitivement défaillant**

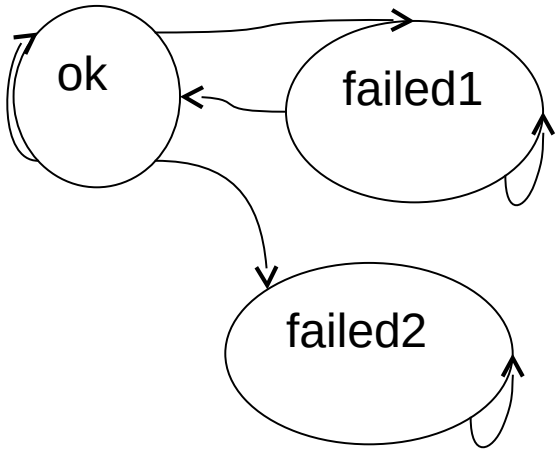
V_{i-1}	V_i	CPD
ok	ok	0.8
ok	failed1	0.15
ok	failed2	0.05
Failed1	ok	0.8
Failed1	Failed1	0.2
Failed2	Failed2	1

Modélisation d'un cas pratique

3 états possibles : ok failed1, failed2 tel que

A chaque transition

- **Soit le système est « utilisé » avec pour effet un comportement normal, ou une défaillance fail1, ou une défaillance fail2.**
- **Soit, une réparation est tentée, avec pour effet un retour à l'état ok, ou un échec.**
- **Soit le système est dans l'état failed2 et reste définitivement défaillant**



Ce que l'on peut analyser

Probabilité stationnaire = vecteur π de probabilité

Tel que $\frac{Card\left(\left\{X_j = v_i \mid j \leq n\right\}\right)}{n}$ ¿

~ temps passé en moyenne dans l'état v_i pour chaque v_i

Probabilité transitoire = probabilité que Xi vaille v pour i = une date précise, ou i dans un intervalle

Intérêt (exemple) : calcul la probabilité d'être fiable à la date i.

Evaluation de fiabilité

Fiabilité à la demande = probabilité de transition d'un état fiable vers un état fiable …..

Que peut on étudier :

- **Probabilité de rester fiable pendent N instants**
- **Probabilité de ne pas subir un type particulier de défaillance sur un intervalle I d'instants.**

Comment l'exprimer ? C'est une propriété d'invariance…. On formalisera plus tard.

Evaluation de la disponibilité

Disponibilité ~ ratio de temps passé dans un état où l'on n'est pas dans un état défaillant sur le temps total.

- ⇒ **Probabilité stationnaire fournie une mesure de la disponibilité « en moyenne à l'infini »**
- ⇒ **Probabilité transitoire sur un intervalle autre mesure de disponibilité (i.e. probabilité d'être dans un état fonctionnel à un quelconque moment d'un intervalle donné).**

PB = les transitions modélisent un temps logique (un nombre d'action), il faut que cela ait du

Chaîne de markov en temps continu

Idée : dynamique en temps continue entre état discret =

Une séquence de paire (état discret, durée de séjour)

Chaine de Markov continue = processus stochastique : (Xi,Ti), i dans N tel que

- **(X_i), i dans N est une chaîne discrète de markov**
- **(T_i), i dans N est une suite de variables aléatoires continues**
- **On définit X(t) comme le X_k tel que t est dans $[T_k, T_{k+1}]$**
- **La chaîne est caractérisée par**

$$P(X(t+h)=v_i \mid X(t)=v_j) = q_{ji}\, h + o(h)$$

Principe : q_{ji} constante désignant le taux de transition de la valeur v_j vers v_i

Conséquence et interprétation

Hypothèses de travail:

- **Taux de transition constant (chaine dite stationnaire)**
- **Domaine de valeur fini**

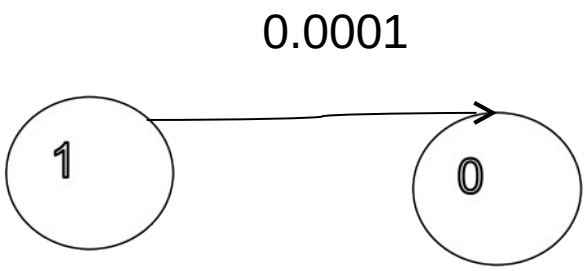
Conséquences :

- **Temps de séjour dans l'état v_i suit une loi exponentielle de paramètre : $\sum_{j \neq i} qij$**
- **le taux de sortie est la somme des taux individuels de transition**

Exemple

Système composé de 1 composant avec 2 états de fonctionnement : 1 (tout va bien) et 0 (défaillance par crash).

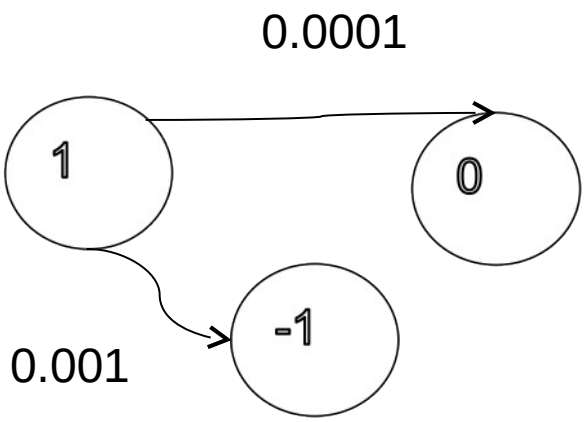
Le taux de transition de l'état 1 vers 0 est supposé constant et égal à 0.0001 h^{-1}



Exemple suite

Système composé de 1 composant avec 2 états de fonctionnement : 1 (tout va bien) et 0 (défaillance par crash), -1défaillance en valeur

Le taux de transition de l'état 1 vers 0 est supposé constant et égal à 0.0001 h^{-1}, le taux de transition de l'état 1 vers -1 est de 0.001 h^{-1}



le taux de sortie de 1 est de 0.0001+0.001

Ce qu'il faut savoir

Analyse symbolique possible de la probabilité transitoire mais potentiellement fastidieuse (résolution pour chaine stationnaire connue)

Possibilité d'automatiser l'analyse via des outils (non symbolique)

Limitations : les comportements sont non bornés dans le temps.

Modélisation de systèmes complexes par réseau de chaines

Idée : 1 chaîne 1 état dans [0,N].

⇒ P chaînes P états dans [0,N] évoluant en parallèle

Utilité : étude d'un système structuré complexe.

Pb : comment modéliser les effets de type « propagation de faute ? »

Outil théorique : réseau d'automate / chaînes de markov synchronisées.

Systèmes à transitions et produit synchronisés

Soit A1 et A2 deux systèmes à transitions définis respectivement par

- **l'ensemble d'état Q1, (Q2)**
- **l'ensemble de transition d'état Δ1, (Δ2) sous ensemble de Q1x Q1, (Q2 x Q2)**
- **L'ensemble d'étiquette L1, (L2) tel que chaque transition est étiquetée par un élément de cet ensemble**

Le produit synchronisé A1 x A2 est un système à transition dont l'ensemble des états est Q1 xQ2, dont les étiquettes sont dans (L1 U L2) et dont les transition sont définies comme suit …..

Systèmes à transitions et produit synchronisés (suite)

Pour chaque transition (q, p) de Δ1 étiqueté l tel que l est dans L1 / L2, alors pour tout état q' de Q2, la transition ((q,q'), (p,q')) est dans l'ensemble des transitions de A1 x A2.

Pour chaque transition (q, p) de Δ2 étiqueté l tel que l est dans L2 / L1, alors pour tout état q' de Q1, la transition ((q',q), (q',p)) est dans l'ensemble des transitions de A1 x A2.

Pour toute étiquette dans l'intersection de L1 L2

((q',q), (p',p)) est dans l'ensemble de transitions de A1 x A2 ssi (q',p') est dans Δ1, et (q,p) est dans Δ2, et toutes les deux sont étiquetés l

Logique temporelle et calcul de probabilité

Idée : on peut évaluer la probabilité pour une chaîne

- **De passer par une séquence d'états**
- **D'être dans un état à une date précise**
- **D'être dans un ensemble d'état à une date précise**
- **….**

On peut évaluer la probabilité de n'importe quel événement qui est une contrainte sur « l'exécution de la chaîne »

Logique temporelle = contrainte sur la séquence d'états franchie (LTL), ou sur les transitions possibles en chaque états (CTL)

Logique temporelle et calcul de probabilité

Syntaxe :

Des contraintes instantanées : logique propositionnelle ou prédicat (sans quantification)

Des contraintes sur l'enchaînement d'état (non bornées):

G φ : φ doit être vraie en chaque instant futur

F φ : φ doit être vraie en au moins un instant du futur

Φ1 U Φ2 : Φ2 doit être vraie au moins un instant dans le futur et Φ1 doit être vrai jusqu'à ce que Φ2 le soit.

Chaque opérateur peut être borné dans le temps via l'ajout d'un interval I après l'opérateur

Logique temporelle et calcul de probabilité

Une formule temporelle peut ensuite être soumise à un opérateur de probabilité : P

P=? [Φ] permet de demander le calcul de la probabilité que Φ soit vraie pour une chaine donnée

P(<|<=) c [Φ] permet de déclencher la vérification de la formule déclarant que Φ est vraie avec une probabilité inférieure strictement (ou égale) à c pour une chaîne donnée

Outil Prism

Un outil pour modéliser les chaines discrètes et continues

Un langage pour décrire des objectifs d'analyse stationnaires / transitoires

Une méthodologie pour analyser les résultats

Passage à la pratique